I- دالـــة اللـوغـاريـتـم النبيـــري :

1- تعريـــف :

الدالة الأصلية للدالة $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ على $\mathbb{R}_+^*$ والتي تنعدم في 1 تسمى دالـة اللـوغـاريـتـم النبـري ونرمز لها بـ $\ln$ أو (Log).

استنتـاج :

1- $\ln(1) = 0$

2- $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; ; \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$

3- دالة اللوغاريتم النبري متصلة على $\mathbb{R}_+^*$.

4- دالة اللوغاريتم النبري تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

5- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

$$\ln x = \ln y \iff x = y$$

$$x \succ y \iff \ln x \succ \ln y$$

6- لدينا : $\ln 1 = 0$

x	0 $\qquad$ 1 $\qquad$ $+\infty$
$\ln'(x)$	‖ $+$
$\ln x$	‖ $\nearrow$ 0 $\nearrow$

إذن :

$$1 \prec x \iff \ln x \succ 0$$

$$0 \prec x \prec 1 \iff \ln x \prec 0$$

2- خاصيـــات :

1- : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \; ; \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$

2- : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; ; \quad \ln\frac{1}{x} = -\ln x$

3- : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \; ; \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

4- : $\forall n \in \mathbb{N} \, , \, \forall x \in \mathbb{R}_+^* \; ; \quad \ln x^n = n \ln x$

5- : $\forall r \in \mathbb{Q} \, , \, \forall x \in \mathbb{R}_+^* \; ; \quad \ln x^r = r \ln x$

حـالات خـاصـة :

لكل x من $\mathbb{R}_+^*$:

$$\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$

$$\ln\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3} \ln x$$

$$\ln\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x$$

-3 دراسة الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\ln x$

1-3 : مجموعة التعريف : $D_f =]0\,,\,+\infty[= \mathbb{R}_+^*$

2-3 نهايات مهمة :

-1 $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

-2 $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

-3 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

-4 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

-5 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

-6 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

<u>نهايات أخرى</u>

-7 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{n-1}(x\ln x) = 0 \qquad n\in\mathbb{N}^*$

- 8 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^n(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt[n]{x}\,\ln\sqrt[n]{x}^{\,n}\right)^n = 0$ ، $n\in\mathbb{N}^*$

- 9 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^n x}{x} = 0 \qquad n\in\mathbb{N}^*$

-10 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad n\in\mathbb{N}^*$

4 : الرتابـة :

لدينا : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} \succ 0 \qquad , \qquad \forall x\in\mathbb{R}_+^*$

الدالة f متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

إذن : f تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$.

وبما أن : $1\in\mathbb{R}$

فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد من $\mathbb{R}_+^*$ ونرمز له بـ e حيث $\ln e = 1$.

بحيث : $e \simeq 2{,}718$

-5 **تعميـــم :**

نعتبر الدالة المعرفة بـ : $f(x) = \ln(U(x))$

مجموعة تعريف الدالة f : $D_f = \{x\in D_u \;/\; U(x)\succ 0\}$:

النهايـات :

- $\underline{\lim\limits_{x\to x_0} U(x) = +\infty} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \ln U(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln U(x)}{U(x)} = 0 \end{cases}$

- $\underline{\lim\limits_{x\to x_0} U(x) = 0^+} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \ln(U(x)) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} U(x)\ln U(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln(1+U(x))}{U(x)} = 1 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to x_0} U(x) = 1 \Rightarrow \left\{ \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\ln(U(x))}{U(x) - 1} = 1 \right.$

مشتقة الدالة f :

إذا كانت U قابلة للاشتقاق وموجبة قطعا على I. فأن الدالة f قابلة للاشتقاق على I
و $\forall x \in I \;;\; f'(x) = \ln'(U(x)) \times U'(x)$

$$= \frac{U'(x)}{U(x)}$$

تعريـف :

u دالة قابلة للاشتقاق على u ولا تنعدم.

الدالة $\dfrac{u'}{u}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على I.

استنتـاج :

الدوال الأصلية للدالة $\left(x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}\right)$ هـي الـدوال $x \mapsto \ln|u(x)| + C$ $\quad C \in \mathbb{R}$

ملاحظـة :

إذا كانت : $f(x) = \ln|u(x)|$

فإن : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

دالـة اللـوغـاريتـم للأسـاس a :

تعريـف :

لتكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا ومخالفا للعدد 1.

$$a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$$

الدالة $\left(x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln a}\right)$ تسمى دالـة اللـوغاريتـم للأسـاس a. ونرمز لها بـ $\log_a$.

أي أن : $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

ملاحظـة :

$$\log_a(a) = 1$$

خاصيـات :

-1 لكل x و y من $\mathbb{R}_+^*$:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

-2 لكل x من $\mathbb{R}_+^*$:

ولكل n من $\mathbb{N}$ ،

ولكل r من $\mathbb{Q}$ ،

$$\log_a(x^n) = n \log_a(x)$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x)$$

دراسـة الدالـة $\log_a$

لتكن f_a الدالة المعرفة بـ : $f_a(x) = \log_a(x)$

مجموعة التعريـف :

$$D_a =]0\,,\,+\infty[$$

النهـايــات :

الحالـة 1 : $a \succ 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} \log_a(x) = -\infty$$

الحالـة 2 : $0 \prec a \prec 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} \log_a(x) = +\infty$$

التغيــرات :

لكل x مــن $\mathbb{R}_+^*$

$$(\log_a(x))' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\,\ln a}$$

الفــروع اللانهائيــة :

لدينا : $\left|\lim_{x\to0^+} \log_a(x)\right| = +\infty$

إذن : $(x=0)$ مقــارب لـ (ℓ_f).

ولدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}\cdot\frac{1}{\ln a} = 0$

إذن : (ℓ_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

حالـة خاصـة :

إذا كانت $a=10$

فإن الدالة $\log_{10}$ تسمى دالـة اللوغـاريتـم العشـري، ونرمز لها بـ $\log$.

استنتـاج :

-1 $\log_{10} = 1$

-2 $\log_{10^x} = x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

-3 $\forall x,y\in\mathbb{R}_+^* \;;\; \log(xy) = \log x + \log y$

-4 $\log\frac{x}{y} = \log x - \log y$

ملاحظـة :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \;;\; \forall y\in\mathbb{R}\; \log x = y \iff x = 10^y$$